Reconstruction of invariants of configuration spaces of hyperbolic curves from associated Lie algebras(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Sawada, Koichiro

（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	澤田　晃一郎
論文題目	Reconstruction of invariants of configuration spaces of hyperbolic curves from associated Lie algebras （双曲的曲線の配置空間の不変量の付随するリー代数からの復元）		

（論文内容の要旨）

本論文は数論幾何学の論文であり、代数曲線の配置空間という高次元代数多様体に対する遠アーベル幾何学を研究対象としている。遠アーベル幾何学は１９８０年代前半にGrothendieckが提唱した数論幾何学の比較的新しい一分野で、代数多様体の幾何（さまざまな幾何的不変量や、究極的には多様体そのもの）をその数論的基本群という非可換位相群から再構築しようとするものである。代数曲線（１次元代数多様体）の遠アーベル幾何学は、１９９０年代の中村、玉川、望月らによる研究により一般的に確立されているが、高次元代数多様体の遠アーベル幾何学は、その定式化自体の難しさもあり、いまだ一般的に確立されているとは言い難い状況である。

高次元遠アーベル幾何学研究のそのような状況の中で、これまで比較的系統的に研究されてきた対象が、Grothendieck が初等的遠アーベル多様体と呼んだ、双曲的多重曲線という高次元代数多様体である。双曲的多重曲線の遠アーベル幾何学は、望月、星によって４次元以下で一般的に確立されており、また、Schmidt-Stix、星および本論文著者らによる一般次元における部分的結果も存在する。本論文で研究対象とする双曲的曲線の配置空間は、特別なタイプの双曲的多重曲線であり、高度な対称性やモジュライ解釈の存在などの理由により、１９８０年代以降深く研究されてきた。特に、望月-玉川、星-南出-望月らの研究により、配置空間の種々の幾何的不変量が幾何的基本群から復元されることが証明されている。但し、その証明は、低種数の場合の取り扱いが系統的とは言えず、ややアドホックなところが残っていた。

本論文では、双曲的曲線の配置空間の不変量の基本群からの復元を研究するにあたり、まず付随するリー代数を系統的に徹底的に研究し、その応用として先の問題に対する系統的な解答を与えるとともに、多数の遠アーベル幾何学的帰結や応用を導いている。

より具体的に本論文の内容を説明する。K を標数 0 の代数閉体、X を K 上の(g,r)型の双曲的代数曲線、n を正の整数、l を素数とする。X_n を X の n 次配置空間とし、X_n のエタール基本群$\pi_1(X_n)$の最大副 l 商をΠ_n で表す。Π_n の重みフィルトレーションに付随する Z_l 上の次数付きリー代数から次数構造を忘れることで得られる Z_l 上の抽象リー代数を P_n で表す。一般化射影 $X_n \to X_m$ から誘導される全射準同型$\Pi_n \to \Pi_m$ の核として得られるΠ_n の部分群を長さ$(n-m)$の一般化ファイバー部分群と呼ぶ。同様に、一般化射影 $X_n \to X_m$ から誘導される全射準同型 $P_n \to P_m$ の核として得られる P_n のイデアルを長さ$(n-m)$の一般化ファイバーイデアルと呼ぶ。本論文では、まず、X_n の幾何的不変量のリー代数 P_n からの復元について、次の基本的な二定理を証明している：

<u>定理A</u> Z_l 上のリー代数 P_n を入力データとし、n、および長さ$(n-m)$の一般化ファイバーイデアル全体の集合を出力とするアルゴリズムが存在する。さらに、$n \geqq 2$ ならば、(g,r)、および、与えられた正の整数 d に対し、次数が d 以上の斉次元全体で生成される P_n のイデアルを出力とするアルゴリズムが存在する。

<u>定理B</u> I を P_n の Z_l 上のイデアルとする．このとき、以下は同値:
(1) I は長さ$(n-1)$の一般化ファイバーイデアルである。

(2) Pn/I は Zl 上のリー代数として P1 と同型である。

定理 A、定理 B の証明は、リー代数 Pn の生成元と関係式による表示を丁寧に追跡し、Pn の全射像においてどうふるまうかを徹底的に解析したものである。主として初等的あるいは代数的な証明であるが、組織的であり明快である。

また、この結果の基本群への応用として、以下を証明している:

<u>定理 C</u> N をΠn の閉正規部分群とする。このとき、以下は同値:
(1) N は長さ(n-1) の一般化ファイバー部分群である。
(2) Πn/N はΠ1 と同型である。

これは、星-南出-望月による条件付きの従来結果の完全な一般化である。なお、本論文では、定理 C で副 l 基本群を副有限基本群に取り替えたものも、合わせて証明している。

さらに、以上の研究の遠アーベル幾何学への応用として、一般化劣 l 進体上の双曲的曲線の配置空間と双曲的多重曲線の間の同型に関する Grothendieck 予想についても、新しい結果を得ている。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

本論文は代数曲線の配置空間に対する遠アーベル幾何学を研究対象としている。代数曲線の遠アーベル幾何学は一般的に確立されているが、高次元代数多様体の遠アーベル幾何学は、その定式化自体の難しさもあり、いまだ一般的に確立されているとは言い難い状況である。そのような状況の中で、これまで比較的系統的に研究されてきた対象が双曲的多重曲線であり、さらにその中でも、本論文で研究対象とする双曲的曲線の配置空間は、高度な対称性やモジュライ解釈の存在などの理由により深く研究されてきた。特に、先行研究により、配置空間の種々の幾何的不変量が幾何的基本群から復元されることが証明されている。但し、その証明は、低種数の場合の取り扱いが系統的とは言えず、ややアドホックなところが残っていた。

本論文では、双曲的曲線の配置空間の不変量の、その基本群からの復元を研究するにあたり、まず付随するリー代数を系統的に徹底的に研究し、その応用として先の問題に対する系統的な解答を与えるとともに、多数の遠アーベル的帰結や応用を導いている。

代数曲線の配置空間の基本群の付随する次数付きリー代数を通じた研究は、１９８０年代の伊原の研究に端を発し、朝田、金子、中村、角皆、高尾らわが国の研究者を中心に盛んに行われていたが、１９９０年代後半以降下火になっていた。本論文の研究は、この方向の研究を本質的にほぼ２０年ぶりに再興し、他手法でこれまで解けなかった未解決問題を解決したことは意義が大きい。今後再びこの方向の研究が盛んになる端緒となる可能性も示唆している。

本論文の構成は精密で系統的であり、それぞれの証明は主として初等的あるいは代数的であるが、組織的であり明快である。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成３０年１２月２７日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

なお、本論文は、京都大学学位規程第１４条第２項に該当するものと判断し、公表に際しては、当該論文の全文に代えてその内容を要約したものとすることを認める。

要旨公表可能日：即日